ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CPII. **SEMESTRE 4**

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 (\int_0^x x^2 e^{xy} dy) dx$, $J = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy \right) dx$,

$K = \displaystyle\int_1^a \left(\int_1^b xye^{x+y} dy \right) dx$,

$L = \iint x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$ et $M = \iint \frac{y}{1+x^2} dxdy$

sur $D = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 2

1) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy = Arctan(e^{-x})$
2) En déduire que : $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy \right) dx = \pi$

Exercice 3

Calculer l'aire intérieure à la lemniscate d'équation polaire :

$r = a\sqrt{cos(2\theta)}$ ou $\theta \epsilon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ et $a > 0$. Voir figure 1.

Exercice 4

Soit $R > 0$, $D = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ et

$\Delta = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq R\}$

1) Calculer : $I(R) = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ sur D.
2) On pose : $J(R) = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ sur Δ.
   Donner un encadrement de J à l'aide de I.
3) Montrer que la fonction : $R \mapsto \int_0^R e^{-x^2} dx$ admet une limite en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

Exercice 5

1) Calculer l'aire du domaine limité par les paraboles :
   $y^2 = 3 - x$ et $y^2 = 3 - 3x$ et $x \geq 0$.
2) Soit $a > 0$. Trouver l'aire du domaine extérieur au cercle d'équation polaire : $r = a$ et intérieur à la cardioïde d'équation polaire :
   $r = a(1 + cos\theta)$. Voir figure 2.

Exercice 6

1) Soient $a > 0$ $et\ g$ une fonction de classe C^1. Calculer $\int_0^a xg'(x)dx$.
2) Soient $a > 0$, $b > 0$, f une fonction de classe C^4 et $D = \{(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq a\ \ et\ \ 0 \leq y \leq b\}$.
Calculer $\iint xy \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(x, y)dx\, dy$ sur D.

Exercice 7

Calculer les intégrales triples suivantes :

1) $I = \iiint x^a y^b z^c dx\, dy\, dz$ sur $D = \{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\ et\ 0 \leq z \leq xy\}$ avec $(a, b, c)\epsilon(\mathbb{R}_+^*)^3$.
2) $J = \iiint \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, dx\, dy\, dz$ sur $D = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\ \ et\ x + y + z \leq 1\}$
3) Calculer le volume du domaine : $D = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \leq 5, x - y + z \geq 1\ \ et\ \ x^2 + y^2 \leq 4\}$

Exercice 8

En utilisant un changement de variable convenable, calculer les intégrales triples suivantes :

1) $I = \iiint z^2 dx\, dy\, dz$ sur $D = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leq R^2 \quad et\ \ 0 \leq z \leq h\}$
2) $J = \iiint \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right) dx\, dy\, dz$ sur $D = \left\{(x, y, z): \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\}$ avec $(a, b, c)\epsilon(\mathbb{R}_+^*)^3$.
3) $K = \iiint |x^2 - y^2|\, dx\, dy\, dz$ sur $D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq z^2\ \ et\ \ 0 \leq z \leq 1\}$

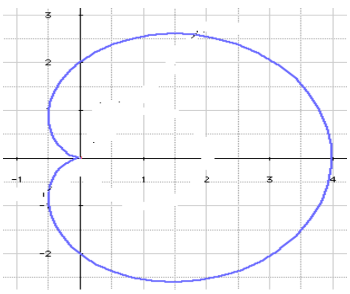
Figure 2

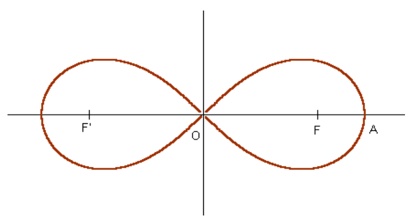

Figure 1